UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS - UNICAMP
INSTITUTO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS - IFCH
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E PLANEJAMENTO ECONÔMICO - DEPE
CENTRO TÉCNICO ECONÔMICO DE ASSESSORIA EMPRESARIAL - CTAE

MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA

Laércio Bisetto

1983

INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é apresentar as noções fundamentais de Matemática Financeira. São apresentados apenas os instrumentos principais, cujo entendimento e correto manuseio possibilita a solução da maior parte dos problemas cotidianos ligados a essa área.

A utilização de fórmulas é restringida ao essencial. Procuramos tratar dos problemas mais comuns, de forma bastante clara, de maneira que se possa compreender o raciocínio que conduz às suas soluções.

Por não terem aplicações práticas não são abordados assuntos como o desconto simples racional (ou por dentro), o desconto composto bancário, etc. Também não tratamos das rendas enquanto tal, já que se referem a meras aplicações de juros compostos.

1. JUROS SIMPLES

"Juro é uma compensação em dinheiro pelo empréstimo de um capital financeiro, a uma taxa combinada, por prazo determinado". [1]

O juro é chamado simples quando é produzido unicamente pelo capital inicial". [2]

Exemplo 1 : calcular os juros de Cr$ 500.000, a 8% ao mês, durante 4 meses.

Capital = Cr$ 50.000

Taxa de juros = 8% a.m. = 0,08 a.m.

Prazo = 4 meses

Juros = Cr$ 500.000 x 0,08 x 4 = Cr$ 160.000

---

[1] De Francisco, Walter. Matemática Financeira. São Paulo, Atlas, 1974, pg. 39
[2] Idem, ibidem.

Fórmula: $\boxed{j = Cin}$ onde $\begin{cases} j = \text{juro} \\ C = \text{Capital} \\ I = \text{Taxa (unitária)} \\ N = \text{número de períodos} \end{cases}$

1.1. - Montante (M)

Montante é o capital acrescido de juros.

Exemplo 2 : calcular o montante com os dados do exemplo anterior.

Montante = capital + juros

Montante = Cr$ 500.000 + Cr$ 160.000 = Cr$ 660.000

O quadro 1 nos mostra, com os números do exemplo dado, os juros mensais e a formação dos montantes mensais.

QUADRO 1

n	Saldo inicial (Cr$)	Juros (Cr$)	Juros acumulados (Cr$)	Montante (Cr$)
1	500.000	40.000	40.000	540.000
2	540.000	40.000	80.000	580.000
3	580.000	40.000	120.000	620.000
4	620.000	40.000	160.000	660.000

Como podemos verificar, o valor dos juros, mês a mês, é constante, uma vez que é calculado sempre sobre o capital inicial. Por outro lado, o montante ao final de cada mês é obtido pela soma do capital inicial e dos juros acumulados.

Fórmula do montante: $M = C + j$, onde
M = montante
C = capital inicial
J = juros

Como $j = Cin$,
temos $M = C + Cin$

ou $\boxed{M = C\ (1 + in)}$

Podemos usar esta fórmula para determinar não só o montante mas também o capital aplicado, o número de períodos e a taxa de juros.

Exemplo 3 : calcular o montante de uma aplicação de Cr$ 2.000.000, à taxa de 4% ao mês, ao final de 7 meses.

$$M = Cr\$\ 2.000.000\ (1 + 0,04 \,.\, 7)$$

$$M = Cr\$\ 2.000.000\ (1 + 0,28)$$

$$M = Cr\$\ 2.000.000 \times 1,28$$

$$M = Cr\$\ 2.560.000$$

Exemplo 4 : Qual o capital que, aplicado a 6,5% ao ano, durante 5 anos, perfaz o montante de Cr$ 6.956.250?

$$Cr\$\ 6.956.250 = C\ (1 + 0,065 \,.\, 5)$$
$$Cr\$\ 6.956.250 = C\ (1 + 0,325)$$
$$Cr\$\ 6.956.250 = C \,.\, 1,325$$
$$\frac{Cr\$\ 6.956.250}{1,325} = C$$

$$C = Cr\$\ 5.250.000$$

Exemplo 5 : Cr$ 75.000, aplicados a 5% ao mês, deram o montante de Cr$ 97.500.

Por quantos meses o capital foi aplicado?

$$Cr\$\ 97.500 = Cr\$\ 75.000\ (1 + 0,05 \,.\, n)$$

$$\frac{Cr\$\ 97.500}{Cr\$\ 75.000} = 1 + 0,05 \,.\, n$$

$$1,3 = 1 + 0,05 \,.\, n$$
$$1,3 - 1 = 0,05 \,.\, n$$
$$0,3 = 0,05 \,.\, n$$

$$\frac{0,3}{0,05} = n$$

$$6 = n$$
$$n = 6 \text{ meses}$$

Exemplo 6 : A que taxa de juro foi aplicado o capital de Cr$ 150.000 que, após 10 meses, deu em resultado o montante de Cr$ 228.750?

$$\text{Cr\$ } 228.750 = \text{Cr\$ } 150.000 \ (1 + i \ . \ 10)$$

$$\frac{\text{Cr\$ } 228.750}{\text{Cr\$ } 150.000} = 1 + 1 \ . \ 10$$

$$1{,}525 = 1 + 1 \ . \ 10$$

$$1{,}525 - 1 = i \ . \ 10$$

$$0{,}525 = i \ . \ 10$$

$$\frac{0{,}525}{10} = i$$

$$0{,}0525 = i$$

$$i = 0{,}525 \text{ ou } i = 5{,}25\%$$

2, DESCONTO SIMPLES

"Desconto é o abatimento que se faz sobre um título de crédito quando resgatado antes do seu vencimento" [3].

A forma mais utilizada é a do desconto simples comercial (ou por fora), que é calculado sobre o valor nominal do título.

$$\boxed{d = Nin}$$

onde d = desconto
N = valor nominal do título
I = taxa (unitária)
N = número de períodos

Exemplo 7 : Calcular o desconto simples comercial de uma duplicata de Cr$ 200.000, vencível em 90 dias, à taxa de 7% ao mês.

$$d = \text{Cr\$ } 200.000 \times 0{,}07 \times 3$$

$$d = \text{Cr\$ } 200.000 \times 0{,}21$$

$$d = \text{Cr\$ } 42.000$$

---

[3] Idem pg. 42

1. - <u>Cálculo do valor atual</u> (A)

O valor (A) é a diferença entre o valor nominal e o desconto.

A = N - d
Como d = Nin
A = N - Nin

$\boxed{A = N\,(1 - in)}$

O valor atual da duplicata do exemplo anterior é

A = Cr$ 200.000 - Cr$ 42.000

A = Cr$ 158.000

ou

A = Cr$ 200.000 (1 - 0,07 x 3)

A = Cr$ 200.000 (1 - 0,21)

A = Cr$ 200.000 (0,79)

A = Cr$ 158.000

TAXAS PROPORCIONAIS

"Quando entre duas taxas existe a mesma relação que as dos períodos de tempo a que se referem, elas são proporcionais". [4]

Exemplo 8 : A taxa de 24% ao ano é proporcional à taxa de 2% ao mês.

24% .... 12 meses
2% .... 1 mês

Exemplo 9 : São proporcionais as seguintes taxas:

18,0 % ao ano	e 1,5% ao mês
18,0% ao ano	e 4,5% ao trimestre
7,2 % ao ano	e 0,6% ao mês
3,9 % ao trimestre	e 1,3% ao mês
8,0 % ao semestre	e 4,0% ao trimestre
9,0 % ao semestre	e 6,0% ao quadrimestre
5,0 % ao mês	e 10,0% ao bimestre
2,5 % ao bimestre	e 15,0% ao ano
6,0 % ao mês	e 0,2% ao dia
0,3 % ao dia	e 108,0% ao ano

[4] Idem pg. 53

3. JUROS COMPOSTOS

"Juros compostos são os juros que no final de cada período são somados ao capital para produzirem novos juros no período seguinte".[5]

Exemplo 8 : Calcular os juros compostos de Cr$ 500.000, a 8% ao mês, durante 4 meses (mesmos dados do exemplo 1)

Para o cálculo dos juros e dos montantes podemos elaborar um quadro como o apresentado abaixo.

QUADRO 2

n	Saldo inicial (Cr$)	Juros (Cr$)	Juros acumulados (Cr$)	Montante (Cr$)
1	500.000	40.000	40.000	540.000
2	540.000	43.200	83.200	583.200
3	583.200	46.656	129.856	629.856
4	629.856	50.388	180.244	680.244

Neste caso, os juros mensais são constantes, porque sua base de incidência não é mais o capital inicial (Cr$ 500.000), mas o montante do mês anterior, que é, por definição, o capital inicial mais os juros acumulados até então.

O valor dos juros pode ser obtido pela diferença entre o montante e o capital inicial.

$J = M - C$

J = Cr$ 680.244 - Cr$ 500.000 = Cr$ 180.244

A questão se volta, então, para o cálculo do montante.

Partindo do quadro 2 vamos analisar a construção dos montantes mês a mês.

O montante do mês 1 é

$540.000 = 500.000 + 40.000 = 500.000 + 500.000 \times 0,08 = 50.000 \times (1+0,08) = 500.000 \times 1,08$

O montante do mês 2 é

$583.200 = 540.000 + 43.200 = 540.000 + 540.000 \times 0,08 = 500.000 \times (1+0,08) = 540.000 \times 1,08$.

Mas 540.000 é o montante do mês 1, que concluímos ser igual a expressão 500.000 x 1,08.

Substituindo temos:

583.200 = 500.000 x 1,08 x 1,08 = 500.000 x $1{,}08^2$

O montante do mês 3 é

629.856 = 583.200 + 46.656 = 583.200 + 583.200 x 0.08 = 583.200 x (1 + 0,08) = 583.200 x 1,08

Porém acabamos de ver que 583.200 é o montante do mês 2, que é igual a expressão 500.000 x $1{,}08^2$.

Substituindo temos

629.856 = 500.000 x $1{,}08^2$ x 1,08 = 500.000 x $1{,}08^3$

Finalmente o montante do mês 4 é

680.244 = 629.856 + 50.588 = 629.856 + 629.856 x 0,08 = 629.856 x (1+0,08) = 629.856 x 1,08

Como 629.856 é o montante do mês 3, que também pode ser representado por 500.000 x $1{,}08^3$, podemos substituí-lo na expressão montante do mês 4 e temos, então:

680.244 = 500.000 x $1{,}08^3$ x 1,08 = 500.000 x $1{,}08^4$

O resumo desses cálculos está no quadro 3.

QUADRO 3

Mês	Montante		
1	500.000 x 1,08 =	500.000 x 1,08 =	540.000
2	500.000 x $1{,}08^2$ =	500.000 x 1.1664 =	583.200
3	500.000 x $1{,}08^3$ =	500.000 x 1,259712 =	629.856
4	500.000 x $1{,}08^4$ =	500.000 x 13604889 =	680.244

Concluímos que, para qualquer período n, o montante é obtido pela multiplicação do capital inicial pelo coeficiente $(1 + i)^n$

$$\boxed{M = C\,(1 = i)^n}$$

[5] Idem pg. 53

Para facilitar, como o coeficiente é uma potência onde entram a taxa de juros i e o número de períodos n, são construídas tabelas. Nas linhas são dados os valores de n e nas colunas os valores de i (veja a tabela I).

Exemplo 9 : para calcular o montante de Cr$ 375.000, aplicados à taxa de 10% a.a. por 14 anos, basta multiplicá-los pelo coeficiente encontrado na interseção da linha 14 com a coluna 10% da tabela I.

Montante = Cr$ 375.000 x 3,797498 = Cr$ 1.424.062

Se quisermos saber os juros, é só calcular a diferença entre o montante e o capital inicial.

Juros = Cr$ 1.424.062 - Cr$ 375.000 = Cr$ 1.049.062

Outros exemplos:

Exemplo 10 : calcular o montante de Cr$ 28.000, aplicados à taxa de 5% a.m. durante 6 meses.

Montante = Cr$ 28.000 x 1,340095 = Cr$ 37.523

Exemplo 11 : calcular o montante de Cr$ 1.200.000, aplicados à taxa de 3% a.a. por 15 anos.

Montante = Cr$ 1.200.000 x 1,557967 = Cr$ 1.869.560

Com o auxílio da tabela I fica fácil também a solução de problemas derivados, como:

- cálculo do capital inicial, dados do montante, a taxa e o número de períodos;
- cálculo da taxa de juro, dados o capital inicial, o montante e o número deperíodos;
- cálculo do número de períodos, dados o capital inicial, o montante e a taxa.

Exemplo 12 : um capital de Cr$ 140.000,00, aplicado a 11% a.a., deu o montante de Cr$ 322.635,18. Por quanto tempo foi aplicado?

$$\text{Cr\$ } 140.000{,}00 \; (1{,}11)^n = \text{Cr\$ } 322.635{,}18$$

$$(1{,}11)^n = \frac{\text{Cr\$ } 322.635{,}18}{\text{Cr\$ } 140.000{,}00}$$

$$(1{,}11)^n = 2{,}304537$$

Na tabela I verificamos que o coeficiente 2,304537 encontra-se na interseção da coluna 11%, que é a taxa de juros dada, com a linha n = 8.
Portanto, a resposta é 8 anos.

Se, em vez de tabela, dispuséssemos de uma calculadora com recursos para calcular raízes, poderíamos fazer:

$$(1{,}11)^n = 2{,}304537$$

Portanto:

$$\sqrt[n]{2{,}304537} = 1{,}11$$

então n= 8

Exemplo 13: um capital de Cr$ 20.000, aplicado por 20 meses, deu o montante de Cr$ 47.328. A que taxa foi aplicado?

$$\text{Cr\$ } 20.000 \; (1 + i)^{12} = \text{Cr\$ } 47.328$$

$$(1 + i)^{12} = \frac{\text{Cr\$ } 47.328}{\text{Cr\$ } 20.000}$$

$$(1 + i)^{12} = 2{,}3664$$

Na tabela I, na linha 12, não existe o coeficiente 2,3664. Verificamos, no entanto, que ele estaria entre o coeficiente 2,012196, que corresponde à taxa de 6%, e o coeficiente 2,518170, que corresponde à taxa de 8%. Portanto, a taxa de juros está entre 6% e 8%.

Para encontrar a resposta fazemos uma interpolação.

Taxa	**Coeficiente**
6%	2,012196
i	2,3664
8%	2,518170

diferença entre as taxas: 8% - 6% = 2%

diferença entre os coeficientes correspondentes =
2,518170 – 2,012196 = 0,505974

Então, a uma diferença de 2% na taxa de juros corresponde uma diferença de 0,505974 no coeficiente.

A diferença entre o coeficiente 2,012196 e o coeficiente 2,3664 é de 0,354204 e corresponde à diferença entre a taxa de 6% e a taxa i.

Pela regra de três simples temos:

2% 0,505974
x 0,354204

$$x = \frac{2\% \times 0{,}354204}{0{,}505974} = 2\% \times 0{,}7000438 = 1{,}4\%$$

Então a taxa de juro i = 6% + 1,4% = 7,4% a.m.

Exemplo 14: qual o capital que, aplicado à taxa de juros compostos de 7% ao mês, durante 3 meses, dá o montante de Cr$ 200.000?

$$\text{Cr\$ } 200.000 = C\ (1{,}07)^3$$

$$\text{Cr\$ } 200.000 = C\ 1{,}225043$$

$$\frac{\text{Cr\$ } 200.000}{1{,}225043} = C$$

$$C = \text{Cr\$ } 163.260$$

Este exemplo nos remete ao desconto composto.

4. DESCONTO COMPOSTO

"O desconto composto é a soma de vários descontos simples, calculados em cada período". [6]

Existem o desconto composto bancário[7] e o desconto composto real. Como o primeiro não tem utilidade prática, vamos discutir apenas o segundo.

Já vimos no item 2 – Desconto Simples – que o valor atual de um título é a diferença entre seu valor nominal e o desconto.

$$A = N - d$$

Consequentemente,

$$D = N - A,$$

ou seja, o desconto é a diferença entre o valor nominal e o valor atual do título.

Por isso, em vez de nos preocuparmos com o valor do desconto propriamente, devemos nos preocupar com o cálculo do valor atual.

O valor atual (A) de um título vencível em n períodos, descontado pelo método do desconto composto real, a uma taxa i, é um valor tal que, aplicado por n períodos à taxa i, dá um montante equivalente ao valor nominal (N).

$$A\ (1 + i)^n = N$$

Em outras palavras, calcular o valor atual (A) de um título, através do desconto composto real, corresponde ao cálculo do capital (C) num problema de juros compostos, e vice-versa. A mesma relação existe entre o valor nominal (N) e o montante (M).

---

[6] idem, pg. 73

[7] o desconto composto bancário, embora tenha esse nome, não é o que os bancos usam nas operações de desconto de duplicatas, notas promissórias, etc.; o método por eles adotado é o desconto simples comercial ou "por fora".

Juros Compostos

$M = C\ (1\ +\ 1)^n$

$C = \dfrac{M}{(1 + 1)^n}$

$\boxed{C = M\ .\ \dfrac{1}{(1 + 1)^n}}$

Desconto Composto Real

$A\ (1\ +\ 1)^n\ =\ N$

$\dfrac{N}{(1 + 1)^n}$

$\boxed{A = N\ .\ \dfrac{1}{(1 + 1)^n}}$

Voltemos ao exemplo 14. Sua redação, numa forma alternativa, poderia ser: calcular o valor atual de uma letra de câmbio de Cr$ 200.000, vencível em 3 meses, descontada pelo método do desconto composto real, à taxa de 1% ao mês.

E a solução seria a mesma:

$A\ \ (1\ +\ i)^n\ \ =\ N$

$A\ \ (1{,}07)^3\ \ =\ Cr\$\ 200.000$

$A.\ 1{,}225043\ \ =\ Cr\$\ 200.000$

$A = \dfrac{Cr\$\ 200.000}{1{,}225043}$

$A = Cr\$\ 200.000\ \times\ \dfrac{1}{1{,}225043}$

$A = Cr\$\ 200.000\ \times\ 0{,}816298$

$A = Cr\$\ 163.260$

Agora vejamos o seguinte:

- para calcular o montante (ou valor nominal), multiplicamos o capital (ou valor atual) pelo coeficiente

$$\frac{1}{(1 + i\ )^n}$$

- para calcular o capital (ou valor atual), multiplicamos o montante (ou valor nominal pelo coeficiente

$$\frac{1}{(1 + 1)^n}$$

Utilizando ainda os números do exemplo 14:

I = 7% ou 0,07

n = 3

M = N = Cr$ 200.000

C = A = Cr$ 163.260

M = N = Cr$ 200.000 = Cr$ 163.260 x $(1 + 0,07)^3$

C = A = Cr$ 163.260 = Cr$ 200.000 x $\frac{1}{(1 + 0,07)^3}$

O coeficiente $(1 + i)^n$ depende dos valores de i e de n e consta da tabela Ique, como já vimos, nos auxilia na determinação do montante ou do valor nominal.

O coeficiente $\frac{1}{(1 + i)^n}$ é o inverso do anterior e serve para calcular o valor atual do capital.

Para se construir uma tabela desses coeficientes basta calcular o inverso dos coeficientes da tabela I. Os resultados assim obtidos estão na tabela II.

Exemplos para utilização na tabela II:

Exemplo 15: calcular o valor atual de um título de Cr$ 680.244, vencível em 4 meses, descontando-o pelo método do desconto composto real, à taxa de 8% ao mês.

$$\left.\begin{array}{l} I = 8\% \\ N = 4 \end{array}\right\} \text{Coeficiente} = 0,735030$$

A = Cr$ 680.244 x 0,735030 = Cr$ 500.000

Exemplo 16: calcular o valor atual de uma letra de câmbio de Cr$ 2.000.000, vencível em 13 meses, descontando-a pelo método do desconto composto real, à taxa de 6% ao mês.

$$\left.\begin{array}{l} n = 13 \\ i = 6\% \end{array}\right\} \quad \text{Coeficiente} = 0{,}468839$$

A = Cr$ 2.000.000 x 0,468839

A = Cr$ 937.678

5. JUROS COMPOSTOS DE SÉRIES UNIFORMES

No item 4 vimos como calcular o montante de um único capital aplicado por <u>n</u> períodos a uma taxa <u>i</u> .

Um dos exemplos utilizados, o número 10, foi o seguinte:

C = Cr$ 28.000

I = 5% a.m.

N = 6 meses

M = ?

Traduzindo, a questão proposta é: qual será o montante, daqui a 6 meses, produzido por uma única aplicação de Cr$ 28.000 feita hoje, a 5% a.m. ?

Um outro problema poderia ser o seguinte:

Exemplo 17: qual será o montante, daqui a 6 meses, produzido por uma <u>série</u> de 6 aplicações, a partir de hoje, no valor de Cr$ 28.000 cada uma, à taxa de 5% a.m.?

Através de diagramas de fluxo de caixa podemos assim representar os dois problemas:

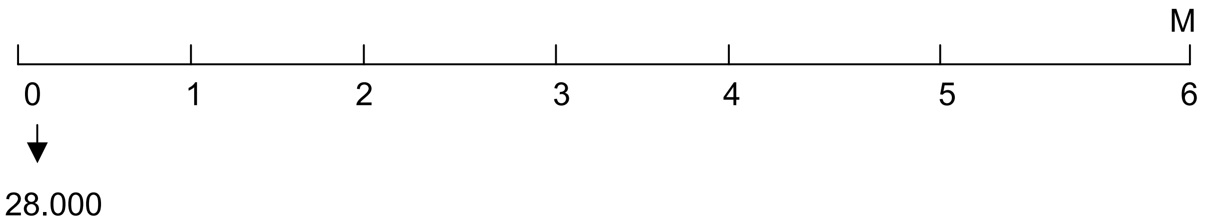

diagrama referente ao exemplo 10

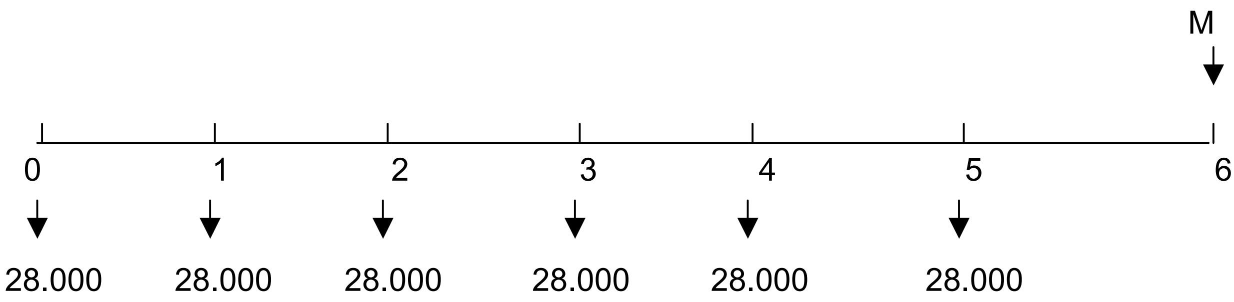

diagrama referente ao exemplo 17

No primeiro problema, a aplicação de Cr$ 28.000, feita no momento 0 vai render por 6 períodos. Portanto, o montante (M), no momento 6, é dado por

M = Cr$ 28.000 x 1,340095 = Cr$ 37.523,
Onde:
1,340095 é o coeficiente encontrado na tabela I (i = 5%; n = 6).

No segundo problema são 6 aplicações de mesmo valor, feitas em 6 meses subsequentes, do mês 0 ao mês 5. Queremos saber o montante no mês 6, um mês após encerradas as aplicações.

Podemos calcular o montante de cada uma das aplicações isoladamente, utilizando a tabela I, e em seguida somar esses montantes.

	Capital	**x Coeficiente**	**= Montante**
Montante da 6a. aplicação	Cr$ 28.000	x 1,050000	= Cr$ 29.400
Montante da 5ª aplicação	Cr$ 28.000	x 1,102500	= Cr$ 30.870
Montante da 4ª aplicação	Cr$ 28.000	x 1,157625	= Cr$ 32.413
Montante da 3ª aplicação	Cr$ 28.000	x 1,215506	= Cr$ 34.034
Montante da 2ª aplicação	Cr$ 28.000	x 1,276281	= Cr$ 35.736
Montante da 1ª aplicação	Cr$ 28.000	x 1,340095	= Cr$ 37.523
		TOTAL	**Cr$ 199.976**

Como o valor de cada aplicação é constante, logicamente teria sido mais fácil multiplicar o seu valor pela soma dos coeficientes, e teríamos o mesmo montante.

M = Cr$ 28.000 x 7,122007 = Cr$ 199.976

Problemas desse tipo podem ser pensados em relação ao passado, assim:

Exemplo 18: qual o montante, hoje, de uma série de n aplicações mensais uniformes, de Cr$ 10.000 cada, à taxa de 5% ao mês?

Vamos assumir a hipótese de que a última aplicação tenha ocorrido há um Mês atrás. Assim temos:

a) se n=1, M = Cr$ 10.000 x 1,05 = Cr$ 10.500
b) se n=2, M = Cr$ 10.000 x (1,05 + 1,1025) = Cr$ 10.000 x 2,1525 = Cr$ 21.525
c) se n=3, M = Cr$ 10.000 x (1,05 + 1,1025 + 1,157625) = Cr$ 10.000 x 3,310125 = Cr$ 33.101
d) se n=4, M = Cr$ 10.000 x (1,05 + 1,1025 + 1,157625 + 1,215506 = Cr$ 10.000 x 4,525631=Cr$45.256
e) se n=5, M = Cr$ 10.000 x (1,05 + 1,1025 + 1,157625+1,215506+1,276281=Cr$10.000x5,801912 =Cr$ 58.019
f) se n=6, M = Cr$ 10.000 x (1,05+1,1025+1,157625+1,215506+1,276211+1,340095) = Cr$ 10.000 x 7,142007 = Cr$ 71.420 e assim por diante.

A construção de uma tabela que facilite a solução de problemas desse tipo é muito simples; basta acumular os coeficientes da tabela I. Por esse processo foi construída a tabela II.

Exemplo para utilização da tabela III:

Exemplo 19: qual o montante produzido por uma série de 15 aplicações mensais, de Cr$ 35.000 cada, à taxa de 4% a.m.?

Considerar o montante de um mês após a última aplicação.

M = Cr$ 35.000 x 20,824531 = Cr$ 728.859

6 DESCONTO COMPOSTO DE SÉRIES UNIFORMES

Trata-se de problema semelhante ao de juros compostos de séries uniforme, tratado no item anterior.

Naquela ocasião queríamos saber o montante, quer dizer, o valor das aplicações num momento qualquer após a sua realização. Resolvemos o problema calculando o montante de cada uma das aplicações individualmente e somando tais montantes. Como se tratava de aplicações de mesmo valor, concluímos que era mais fácil e lógico somar os coeficientes e multiplicar pelo valor unitário das parcelas. Concluímos, ainda, que uma tabela contendo os coeficientes acumulados da tabela I facilitaria sobremaneira a resolução dos problemas e, por isso, montamos a tabela III.

Agora, dada uma série uniforme de valores a vencer, queremos descontá-la, isto é, queremos saber seu valor atual.

Exemplo 20: suponhamos quatro duplicatas de Cr$ 80.000 cada, vencíveis daqui a 1, 2, 3 e 4 meses respectivamente. Qual o seu valor atual, pelo desconto composto, considerada a taxa de 6% ao mês?

Na tabela II, coluna 6, encontramos os seguintes coeficientes:

para n = 1, coeficiente = 0,943396
para n = 2, coeficiente = 0,889996
para n = 3, coeficiente = 0,839619
para n = 4, coeficiente = 0,792094

Aplicando-os temos:

Valor atual da 1ª duplicata =	Cr$ 80.000 x 0,943396 =	Cr$ 75.472
Valor atual da 2ª duplicata =	Cr$ 80.000 x 0,889996 =	Cr$ 71.200
Valor atual da 3ª duplicata =	Cr$ 80.000 x 0,839619 =	Cr$ 67.169
Valor atual da 4ª duplicata =	Cr$ 80.000 x 0,792094 =	Cr$ 63.367
	TOTAL =	**Cr$ 277.208**

Evidentemente, o mesmo resultado seria obtido pela multiplicação do valor unitário das duplicatas pela soma dos coeficientes.

Cr$ 80.000 x 3,465106 = Cr$ 277.208

À semelhança da tabela III, cujos coeficientes correspondem aos valores acumulados dos coeficientes da tabela I e servem para calcular montantes de séries uniformes, construímos a tabela IV a partir dos coeficientes da tabela II. Essa Tabela IV destina-se ao cálculo do valor atual de séries uniformes.

Exemplos de aplicação da tabela IV:

Exemplo 21: qual o valor atual de 18 notas promissórias de Cr$ 120.000 cada, vencíveis mensalmente, sendo o vencimento da primeira daqui a um mês, considerando a taxa de juro de 8% ao mês?

N = 18
Coeficiente = 9,371887
I = 8%

Valor atual = Cr$ 120.000 x 9,371887 = Cr$ 1.124.626

Exemplo 22: Qual deve ser o preço a vista de um eletrodoméstico anunciado assim: 24 prestações e Cr$ 38.955, sem entrada? (considere que a taxa de juros cobrada pela loja é de 10% a. m.)

N = 24
Coeficiente = 8,984744
I = 10%

Preço a vista = Cr$ 38.955 x 8,9884744 = Cr$ 350.000

7 TAXAS PROPORCIONAIS E TAXAS EQUIVALENTES

7.1. Taxas Proporcionais

"Quando entre duas taxas existe a mesma relação que a dos períodos de tempo a que se referem, elas são proporcionais". [8]

Exemplo 23: a taxa de 24% no ano é proporcional à taxa de 2% ao mês.

24%....................................12 meses
2%.................................... 1 mês

Exemplo 24: são proporcionais as seguintes taxas:

18,0% ao ano	e	1,5% ao mês
18,0% ao ano	e	4,5% ao trimestre
7,2% ao ano	e	0,6% ao mês
3,9% ao trimestre	e	1,3% ao mês
8,0% ao semestre	e	4,0% ao trimestre
9,0% ao semestre	e	6,0% ao quadrimestre
5,0% ao mês	e	10,0% ao bimestre
2,5% ao bimestre	e	15,0% ao ano
6,0% ao mês	e	0,2% ao dia
0,3% ao dia	e	108,0% ao ano

7.2. Taxas Equivalentes

"Taxas equivalentes são aquelas que, referindo-se a períodos de tempo diferentes, fazem com que um capital produza um mesmo montante, num mesmo tempo". [9]

Exemplo 25: a taxa de 1,80876% ao mês é equivalente à taxa de 24% ao ano. De fato, se aplicarmos Cr$ 100.000 por 3 anos (36 meses), o montante será de Cr$ 190.662 para ambas as taxas.

Cr\$ 100.000 x $(1,24)^3$ = Cr\$ 100.000 x 1,906624 = Cr\$ 190.662

Cr\$ 100.000 x $(1,0180876)^{36}$ = Cr\$ 100.000 x 1,906624 = 190.662

[8] De Francisco, idem pg. 57
[9] De Francisco, idem pg. 57

De imediato podemos deduzir que as taxas proporcionais e as taxas equivalentes estão ligadas aos conceitos de juros simples e juros compostos, respectivamente.

Cálculo da taxa equivalente

Fórmula

$$\boxed{i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1}$$

Onde i = taxa anual

K = número de períodos por ano

i_k = taxa equivalente a i

Exemplo 26: calcular a taxa mensal equivalente a 18% a.a.

$i = 18\%$ ou $0{,}18$

$k = 12$

$i_{12} = ?$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}18} - 1$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1{,}18} - 1$$

$$i_{12} = 1{,}0139 – 1$$

$$i_{12} = 0{,}0139 \text{ ou } 1{,}39\%$$

Exemplo 27: calcular a taxa diária equivalente a 30% a.a.

$i = 30\%$ ou $0{,}30$

$k = 365$

$i_{365} = ?$

$$i_{365} = \sqrt[365]{1 + 0{,}30} - 1$$

$$i_{365} = \sqrt[365]{1{,}30} - 1$$

$$i_{365} = 1{,}000719 – 1$$

$$i_{365} = 0{,}000719 \text{ ou } 0{,}719\%$$

Se tivermos a taxa mensal ou diária e quisermos a taxa equivalente anual, a fórmula será:

$$\boxed{i_k = (1 + i)^k - 1}$$

Onde i = taxa mensal ou diária

k = número de períodos por ano (12 ou 365)

i_k = taxa equivalente a i

Exemplo 28: calcular a taxa <u>anual</u> equivalente a 1% a.m.

i = 1% ou 0,01

k = 12

i_k = ?

$$i_k = (1 + 0{,}01)^{12} - 1 = (1{,}01)^{12} - 1$$
$$i_k = 1{,}1268 – 1$$
$$i_k = 0{,}1268 \text{ ou } 12{,}68\%$$

Exemplo 29: a rentabilidade das aplicações em “over-night” nos últimos dias tem sido, em média, de 0,3% ao dia. Qual a taxa anual equivalente?

i = 0,3% ou 0,003

k = 365

i_k = ?

$$i_k = (1 + 0{,}003)^{365} - 1$$
$$i_k = (1{,}003)^{365} - 1$$
$$i_k = 2{,}984 – 1$$
$$i_k = 1{,}984 \text{ ou } 198{,}4\%$$

8. TAXA NOMINAL, TAXA EFETIVA E TAXA REAL

8.1. Taxa nominal e taxa efetiva

"Quando uma taxa de juros anual é paga em parcelas proporcionais, os juros obtidos não correspondem à taxa oferecida, mas é maior. Desta forma, a taxa oferecida é chamada nominal, enquanto a que é realmente paga e denominada efetiva". [10]

Exemplo 30: consideremos uma taxa de 18% ao ano paga em parcelas mensais proporcionais, ou seja, 1,5% ao mês. A taxa de 18% a.a. é a taxa nominal. Entretanto, 1,5% capitalizados mensalmente equivalem a uma taxa anual de 19,56%, que é a taxa efetiva"[11]

A taxa nominal também pode ser entendida como aquela referente a um capital tomado como base de cálculo mas que não representa o valor efetivamente recebido. A taxa relativa a esse valor efetivamente recebido é a taxa efetiva.

Exemplo 31: uma empresa negocia um empréstimo bancário de Cr$ 1.000.000 para ser pago de uma só vez, após um ano, à taxa de 80% ao ano. Pagará, portanto, Cr$ 1.800.000.

Acontece, porém, que a empresa não recebe os Cr$ 1.000.000. Desse valor o banco desconta IOF, taxa de abertura de crédito, comissão, taxa de expediente, etc., e lhe entrega, digamos, Cr$ 930.000.

As taxas nominal e efetiva são as seguintes:

$$\text{Taxa nominal} = \frac{1.800.000 - 1.000.000}{1.000.000} = \frac{800.000}{1.000.000} = 80\%$$

$$\text{Taxa efetiva} = \frac{1.800.000 - 930.000}{930.000} = \frac{870.000}{930.000} = 93{,}5\%$$

[10] idem, pg. 57
[11] idem, ibidem

8.2. Taxa real

A taxa real é a “diferença” entre a taxa efetiva e a inflação do período.

Essa “diferença”, no entanto, não deve ser entendida como a diferença aritmética obtida pela subtração.

Exemplo 32: tomemos a taxa efetiva do exemplo anterior (93,5%) e digamos que, no mesmo período, a inflação foi de 75%. É absolutamente errado dizer que a taxa real é:

93,5% - 75% - 18,5%

A fórmula correta para se descontar o efeito inflacionário é a seguinte:

$$\boxed{\text{Taxa real} = \frac{1 + \text{taxa efetiva}}{1 + \text{taxa de inflação}} - 1}$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1 + 0{,}935}{1 + 0{,}75} - 1$$

$$\text{Taxa real} = \frac{1 + 0{,}935}{1{,}75} - 1$$

Taxa real = 1,1057 – 1

Taxa real = 0,1057 ou 10,57%

Da mesma forma, dadas as taxas de inflação (ou de correção monetária) e a taxa real a taxa efetiva é obtida por uma multiplicação e não pela simples soma das duas primeiras.

$$\boxed{\text{Taxa efetiva} = (1+\text{taxa de inflação}) \times (1+\text{taxa real}) - 1}$$

Exemplo 33: tomamos um empréstimo, há um ano atrás, e nos comprometemos a pagar correção monetária mais 12% de juros ao ano. Qual a taxa efetiva, se a correção monetária no período foi de 130%?

Taxa efetiva = (1 + 1,3) x (1 + 0,12) - 1

Taxa efetiva = 2,3 x 1,12 - 1

Taxa efetiva = 2,576 - 1

Taxa efetiva = 1,576 ou 157,6%

TABELA I – JUROS COMPOSTOS - Valores de $(1 + i)^n$

n	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	6%	8%	10%	11%	12%
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,060000	1,080000	1,100000	1,110000	1,120000
2	1,060900	1,071225	1,081600	1,092025	1,102500	1,123600	1,166400	1,210000	1,232100	1,254400
3	1,092727	1,108718	1,124864	1,141166	1,157625	1,191016	1,259712	1,331000	1,367631	1,404928
4	1,125590	1,147523	1,169859	1,192519	1,215506	1,262477	1,360489	1,464100	1,518070	1,573519
5	1,159274	1,187686	1,216653	1,246182	1,276282	1,338226	1,469328	1,610510	1,685058	1,762342
6	1,194052	1,229255	1,265319	1,302260	1,340096	1,418519	1,586874	1,771561	1,870415	1,973823
7	1,229874	1,272279	1,315932	1,360862	1,407100	1,503630	1,713824	1,948717	2,076160	2,210681
8	1,266770	1,316809	1,368569	1,422101	1,477455	1,593848	1,850930	2,143589	2,304538	2,475963
9	1,304773	1,362897	1,423312	1,486095	1,551328	1,689479	1,999005	2,357948	2,558037	2,773079
10	1,343916	1,410599	1,480244	1,552969	1,628895	1,790848	2,158925	2,593742	2,839421	3,105848
11	1,384234	1,459970	1,539454	1,622853	1,710339	1,898299	2,331639	2,852117	3,151757	3,478550
12	1,425761	1,511069	1,601032	1,695881	1,795856	2,012196	2,518170	3,138428	3,498451	3,895976
13	1,468534	1,563956	1,665074	1,772196	1,885649	2,132928	2,719624	3,452271	3,883280	4,363493
14	1,512590	1,618695	1,731676	1,851945	1,979932	2,260904	2,937194	3,797498	4,310441	4,887112
15	1,557967	1,675349	1,800944	1,935282	2,078928	2,396558	3,172169	4,177248	4,784589	5,473566
16	1,604706	1,733986	1,872981	2,022370	2,182875	2,540352	3,425943	4,594973	5,310894	6,130394
17	1,652848	1,794676	1,947900	2,113377	2,292018	2,692773	3,700018	5,054470	5,895093	6,866041
18	1,702433	1,857489	2,025817	2,208479	2,406619	2,854339	3,996019	5,559917	6,543553	7,689966
19	1,753506	1,922501	2,106849	2,307860	2,526950	3,025600	4,315701	6,115909	7,265344	8,612762
20	1,806111	1,989789	2,191123	2,411714	2,653298	3,207135	4,660957	6,727500	8,062312	9,646293
24	2,032794	2,283328	2,563304	2,876014	3,225100	4,048935	6,341181	9,849733	12,239157	15,178629

TABELA II – DESCONTO COMPOSTO

Valores de $\frac{1}{(1 + i)^n}$

n	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	6%	8%	10%	11%	12%
1	0,970874	0,966184	0,961538	0,956938	0,952381	0,943396	0,925926	0,909091	0,900991	0,892857
2	0,942596	0,933511	0,924556	0,915730	0,907029	0,889996	0,857339	0,826446	0,811622	0,797194
3	0,915142	0,901943	0,888996	0,876297	0,863838	0,839619	0,793832	0,751315	0,731191	0,711780
4	0,888487	0,871442	0,854804	0,838561	0,822702	0,792094	0,735030	0,683013	0,658731	0,635518
5	0,862609	0,841973	0,821927	0,802451	0,783526	0,747258	0,680583	0,620921	0,593451	0,567427
6	0,837484	0,813501	0,790315	0,767896	0,746215	0,704961	0,630169	0,564474	0,534641	0,506631
7	0,813092	0,785991	0,759918	0,734828	0,710681	0,665057	0,583490	0,513158	0,481658	0,452349
8	0,789409	0,759412	0,730690	0,703185	0,676839	0,627412	0,540269	0,466507	0,433926	0,403883
9	0,766417	0,733731	0,702587	0,672904	0,644609	0,591898	0,500249	0,424098	0,390925	0,360610
10	0,744094	0,708919	0,675564	0,643928	0,613913	0,558395	0,463193	0,385543	0,352184	0,321973
11	0,722421	0,684946	0,640581	0,616199	0,584679	0,526788	0,428883	0,350494	0,317283	0,287476
12	0,701380	0,661783	0,624597	0,589664	0,556837	O,496969	0,397114	0,318631	0,285841	0,256675
13	0,680951	0,639404	0,600574	0,564272	0,530321	0,468839	0,367698	0,289664	0,257514	0,229174
14	0,661118	0,617782	0,577475	0,539973	0,505068	0,442301	0,340461	0,263331	0,231995	0,204620
15	0,641862	0,596891	0,555265	0,516720	0,481017	0,417265	0,315341	0,239392	0,209004	0,182696
16	0,623167	0,576706	0,533908	0,494469	0,458112	0,393646	0,291890	0,217629	0,188292	0,163122
17	0,605016	0,557204	0,513373	0,473176	0,436297	0,371364	0,270269	0,197845	0,169633	0,145644
18	0,587395	0,538361	O,493628	0,452800	0,415521	0,350344	0,250249	0,179859	0,152822	0,130040
19	0,570286	0,520156	0,474642	0,433302	0,395734	0,330513	0,231712	0,163508	0,137678	0,116107
20	0,553676	0,502566	0,456387	0,414643	0,376889	0,311805	0,214548	0,148644	0,124034	0,103667
24	0,491934	0,437957	0,390121	0,347703	0,310068	0,246979	0,157699	0,101526	0,081705	0,065882

TABELA III – JUROS COMPOSTOS - COEFICIENTES ACUMULADOS

n	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	6%	8%	10%	11%	12%
1	1,030000	1,035000	1,040000	1,045000	1,050000	1,060000	1,080000	1,100000	1,110000	1,120000
2	2,090900	2,106225	2,121600	2,137025	2,152500	2,183600	2,246400	2,310000	2,342100	2,374400
3	3,183627	3,214943	3,146464	3,278191	3,310125	3,374616	3,506112	3,641000	3,709731	3,779328
4	4,309136	4,362466	4,416323	4,470710	4,525631	4,637093	4,866601	5,105100	5,227801	5,352847
5	5,468470	5,550152	5,632975	5,716892	5,801913	5,975319	6,335929	6,715610	6,912860	7,115189
6	6,662462	6,779408	6,898294	7,019152	7,142008	7,393838	7,922803	8.487171	8,783274	9,089012
7	7,892336	8,051687	8,214226	8,380014	8,549109	8,897468	9,636628	10,435888	10,859434	11,299693
8	9,159106	9,368496	9,582795	9,802114	10,026564	10,491316	11,487558	12,579477	13,163972	13,775656
9	10,463879	10,731393	11,006107	11,288209	11,577893	12,180795	13,486562	14,937425	15,722009	16,548735
10	11,807796	12,141992	12,486351	12,841179	13,206787	13,971643	15,645487	17,531167	18,561430	19,654583
11	13,192030	13,601962	14,025805	14,464032	14,917127	15,869941	17,977126	20,384284	21,713187	23,133133
12	14,617790	15,113030	15,626838	16,159913	16,712983	17,882138	20,495297	23,522712	25,211638	27,029109
13	16,086324	16,676986	17,291911	17,932109	18,598632	20,015066	23,214920	26,974983	29,094918	31,392602
14	17,598914	18,295681	19,023588	19,784054	20,578564	22,275970	26,152114	30,772482	33,405359	36,279715
15	19,156881	19,971030	20,824531	21,719337	22,657492	24,672528	29,324283	34,949730	38,189948	41,753280
16	20,761588	21,705016	22,697512	23,741707	24,840366	27,212880	32,750226	39,544703	43,500843	47,883674
17	22,414435	23,499691	24,645413	25,855084	27,132385	29,905653	36,450244	44,599173	49,395936	54,749715
18	24,116868	25,357180	26,671229	28,063562	29,539004	32,759992	40,446263	50,159090	55,939488	62,439681
19	25,870374	27,279682	28,778079	30,371423	32,065954	35,785591	44,761964	56,274999	63,202832	71,052442
20	27,676486	29,269471	30,969202	32,783137	34,719252	38,992727	49,422921	63,002499	71,265144	80,698736
24	35,459264	37,949857	40,645908	43,565210	46,727099	53,864512	72,105940		113,413307	132,333870

ABELA IV – DESCONTO COMPOSTO – COEFICIENTES ACUMULADOS

n	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	6%	8%	10%	11%	12%
1	0,970874	0,966184	0,961538	0,956938	0.952381	0,943396	0,925926	0,909091	0,900901	0,892857
2	1,913470	1,899694	1,886095	1,872668	1,859410	1,833393	1,783265	1,735537	1,712523	1,690051
3	2,828611	2,801637	2,775091	2,748964	2,723248	2,673012	2,577097	2,486852	2,443715	2,401831
4	3,717098	3,673079	3,629895	3,587526	3,545951	3,465106	3,312127	3,169865	3,102446	3,037349
5	4,579707	4,515052	4,451822	4,389977	4,329477	4,212364	3,992710	3,790787	3,695897	3,604776
6	5,417191	5,328553	5,242137	5,157872	5,075692	4,917324	4,622879	4,355261	4,230538	4,111407
7	6,230283	6,114544	6,002055	5,892701	5,786373	5,582381	5,206370	4,868419	4,712196	4,563757
8	7,019692	6,873956	6,732745	6,595886	6,463213	6,209794	5,746639	5,334926	5,146123	4,967640
9	7,786109	7,607687	7,435332	7,268790	7,107822	6,801692	6,246888	5,759024	5,537048	5,328250
10	8,530203	8,316605	8,110896	7,912718	7,721735	7,360087	6,710081	6,144567	5,889232	5,650223
11	9,252624	9,001551	8,760477	8,528917	8,306414	7,886875	7,138964	6,495061	6,206515	5,937699
12	9,954004	9,663334	9,385075	9,118581	8,863252	8,383844	7,536078	6,813692	6,492356	6,194374
13	10,634955	10,302738	9,985648	9,682852	9,393573	8,852683	7,903776	7,108356	6,749870	6,423548
14	11,296073	10,920520	10,563123	10,222825	9,898641	9,294984	8,244237	7,366687	6,981865	6,628168
15	11,937935	11,517411	11,118387	10,739546	10,379658	9,712249	8,559479	7,606080	7,190870	6,810864
16	12,561102	12,094117	11,652296	11,234015	10,837770	10,105895	8,851369	7,823709	7,379162	6,973986
17	13,166118	12,651321	12,165669	11,707191	11,274066	10,477260	9,121638	8,021553	7,548794	7,119630
18	13,753513	13,189682	12,659297	12,159992	11,689587	10,827603	9,371887	8,201412	7,701617	7,249670
19	14,323799	13,709837	13,133939	12,593294	12,085321	11,158116	9,603599	8,364920	7,839294	7,365777
20	14,877475	14,212403	13,590326	13,007936	12,462210	11,469921	9,818147	8,513564	7,963328	7,469444
24	16,935542	16,058368	15,246963	14,495478	13,798642	12,550358	10,528758	8,984744	8,348137	7,784316